

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO  
158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2015

**OBSERVACIONES IMPORTANTES:** El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

**OPCIÓN A:** No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

**CUESTIÓN A.1:** Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1,25 puntos] Calcule  $C = A^t \cdot A - B \cdot B^t$ , donde  $A^t$  y  $B^t$  denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de  $A$  y  $B$ .
- b) [1,25 puntos] Halle una matriz  $X$  tal que  $X \cdot C = D$ , siendo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**CUESTIÓN A.2:** Se llama *mediana* de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

- a) [0,25 puntos] Calcule los puntos medios de los tres lados del triángulo de vértices  $A = (5, 3, 6)$ ,  $B = (-1, -1, 2)$  y  $C = (5, 7, 4)$ .
- b) [1 punto] Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.
- c) [1,25 puntos] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

**CUESTIÓN A.3: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites:

a) [1,25 puntos]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-6}{x+1} \right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$

b) [1,25 puntos]  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

**CUESTIÓN A.4:**

- a) [2 puntos] Calcule la integral indefinida  $\int \operatorname{tg}^2(x) dx$ .
- b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función  $f(x) = \operatorname{tg}^2(x)$ , encuentre la que pasa por el punto de coordenadas  $(\pi/4, 1)$ .

**OPCIÓN B:** No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

**CUESTIÓN B.1: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es **idempotente** si cumple que  $A^2 = A$ .

- a) **[0,5 puntos]** Si  $A$  es una matriz idempotente, calcule razonadamente  $A^{2015}$ .
- b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros  $a$  y  $b$  la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

**CUESTIÓN B.2: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta  $r$  y el plano  $\pi$  dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad \text{y} \quad \pi: x - 2y + z = -3$$

- a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta  $r$  es paralela al plano  $\pi$  y calcule la distancia entre ellos.
- b) **[1,25 puntos]** Determine la recta que pasa por el punto  $P = (1, 0, 2)$  y es perpendicular al plano  $\pi$ . Calcule la intersección de dicha recta con el plano  $\pi$ .

**CUESTIÓN B.3: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) **[1 punto]**  $f(x) = x \ln(x)$ , con  $x > 0$ .

b) **[1,5 puntos]**  $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ , con  $x \in \mathbb{R}$ .

**CUESTIÓN B.4:**

- a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida  $\int \ln(1+x^2) dx$ .
- b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función  $f(x) = \ln(1+x^2)$ , encuentre la que pasa por el punto de coordenadas  $(0, -2)$ .



## PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

## 158 MATEMATICAS II. SEPTIEMBRE 2015

## CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

**OBSERVACIONES GENERALES:**

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente.

En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

**OBSERVACIONES PARTICULARES:****OPCIÓN A****CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]****Apartado a)**

Cálculo correcto del producto  $A^t \cdot A$  [0,5 puntos].

Cálculo correcto del producto  $B \cdot B^t$  [0,5 puntos].

Cálculo correcto de  $C$  [0,25 puntos].

**Apartado b)**

Cálculo correcto de la inversa de  $C$  [1 punto].

Cálculo correcto de  $X$  como el producto  $D \cdot C^{-1}$  [0,25 puntos].

**CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos]**

**Apartado a)** Cálculo correcto de los tres puntos medios [0,25 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto de las tres medianas [1 punto].

**Apartado c)** Justificación de que las tres medianas se cortan en un punto [1 punto]. Cálculo correcto del punto de corte [0,25 puntos].

**CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos]**

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado del límite cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , resolviendo la indeterminación del tipo  $1^\infty$  [1,25 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto y justificado del límite cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha, resolviendo la indeterminación del tipo  $\infty-\infty$  [1,25 puntos].

**CUESTIÓN A.4:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [2 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto de la constante de integración [0,5 puntos].

**OPCIÓN B**

**CUESTIÓN B.1:** [2,5 puntos]

**Apartado a)**

Justificación correcta y razonada de que al ser  $A^2=A$  se tiene  $A^{2015}=A$  [0,5 puntos].

**Apartado b)** Justificación correcta y razonada de que  $2a^2=a$  y  $b^2=b$  y, por lo tanto, debe ser  $a=0$  o  $a=1/2$  y  $b=0$  o  $b=1$  [2 puntos].

**CUESTIÓN B.2:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Justificación correcta y razonada de que la recta es paralela al plano [0,75 puntos]. Cálculo correcto y razonado de la distancia [0,5 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto y razonado de la ecuación de la recta [0,75 puntos]. Cálculo correcto y razonado del punto de corte [0,5 puntos].

**CUESTIÓN B.3:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto de la primera derivada  $f'(x)$  [0,25 puntos]. Cálculo del punto crítico  $x=e^{-1}$  [0,5 puntos]. Justificación de la función alcanza en  $x=e^{-1}$  un mínimo cuyo valor es  $-e^{-1}$  [0,25 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto de la primera derivada  $g'(x)$  [0,25 puntos]. Cálculo de los puntos críticos  $x=0$  y  $x=2$  [0,75 puntos]. Justificación de la función alcanza en  $x=0$  un mínimo cuyo valor es 0 [0,25 puntos]. Justificación de la función alcanza en  $x=2$  un máximo cuyo valor es  $4/e^2$  [0,25 puntos].

**CUESTIÓN B.4:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [2 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto de la constante de integración [0,5 puntos].

## CORRESPONDENCIA CON EL PROGRAMA OFICIAL

Programa BORM, 10 de septiembre de 2008, páginas 28109-28110.

### OPCIÓN A

**CUESTIÓN A.1:** Álgebra lineal (Bloque 1). Operaciones con matrices. Inversa de una matriz.

**CUESTIÓN A.2:** Geometría (Bloque 2). Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

**CUESTIÓN A.3:** Análisis (Bloque 3). Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.

**CUESTIÓN A.4:** Análisis (Bloque 3). Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas.

### OPCIÓN B

**CUESTIÓN B.1:** Álgebra lineal (Bloque 1). Operaciones con matrices.

**CUESTIÓN B.2:** Geometría (Bloque 2). Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas: incidencia, paralelismo y perpendicularidad, entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

**CUESTIÓN B.3:** Análisis (Bloque 3). Derivada de una función en un punto. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales y la representación gráfica de una función. Problemas de optimización.

**CUESTIÓN B.4:** Análisis (Bloque 3). Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas.